Matematika Teknik Dasar-2
2 – Bilangan Kompleks - 1

Sebrian Mirdeklis Beselly Putra
Teknik Pengairan – Universitas Brawijaya

Simbol j

Penyelesaian dari sebuah persamaan kuadratik $ax^2 + bx \quad + c = 0$ bisa diselesaikan dengan rumus $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Contoh : jika ada $3x^2 + 9x \quad + 6 = 0$, maka bisa didapatkan

$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4.3.6}}{2.3} = \frac{-9 \pm \sqrt{81 - 72}}{6} = \frac{-9 \pm \sqrt{9}}{6}$$

Maka $x_1 = -\frac{6}{6}$ atau $x_2 = -\frac{12}{6}$

$x_1 = -1$ atau $x_2 = -2$

Hasilnya mudah dan jelas, kemudian coba diselesaikan persamaan $5x^2 - 6x \quad + 5 = 0$

Simbol j

Diselesaikan :

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 100}}{10} = \frac{6 \pm \sqrt{-64}}{10}$$

Berikutnya harus ditentukan akar kuadrat dari -64, berapakah akarnya?

- +8 dan -8 adalah akar kuadrat dari 64 bukan -64
- Sehingga $\sqrt{-64}$ tidak dapat dinyatakan dengan bilangan biasa, karena tidak ada bilangan real yang kuadratnya merupakan kuantitas negatif.
- -64 = -1 x 64, sehingga bisa ditulis:
  $\sqrt{-64}$ = $\sqrt{-1\ x\ 64}$ =$\sqrt{-1} x \sqrt{64}$ = 8$\sqrt{-1}$

Simbol j

$\sqrt{-64} = \sqrt{-1\ x\ 64} = \sqrt{-1} x \sqrt{64} = 8\sqrt{-1}$

Dari hasil di atas masih dihadapkan $\sqrt{-1}$, yang tidak dapat dihitung seperti bilangan real.

Jika kita menulis "j" untuk pengganti $\sqrt{-1}$, maka $\sqrt{-64} = \sqrt{-1}.8$ = j8

Maka walau $\sqrt{-1}$ tidak dapat dihitung kita bisa mengganti dengan j yang akan membuat pekerjaan menjadi rapi.

$\sqrt{-64} = \sqrt{-1\ x\ 64}$ = j8, sama dengan

$\sqrt{-49} = \sqrt{-1\ x\ 49}$ = j7

$\sqrt{-3} = \sqrt{-1\ x\ 3}$ = j1,732 → bagaimana dengan $\sqrt{-16}$?

Simbol j

Maka diselesaikan persamaan $5x^2 - 6x \quad + 5 = 0$ dengan rumus $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 100}}{10} = \frac{6 \pm \sqrt{-64}}{10}$$

$$x = \frac{6 \pm j8}{10} = 0{,}6 \pm j0{,}8$$

Maka x_1 = 0,6 + j0,8 atau x_2 = 0,6 – j0,8

Pangkat j

Karena j menyatakan $\sqrt{-1}$, maka coba dibahas pangkat dari j di bawah:

$j = \sqrt{-1}$	$j = \sqrt{-1}$
$j^2 = -1$	$j^2 = -1$
$j^3 = (j^2)j = -1j = -j$	$j^3 = -j$
$j^4 = (j^2)^2 = -1^2 = 1$	$j^4 = 1$

Perhatikan faktor terakhir $j^4=1$, dimana setiap faktor tersebut muncul dapat diganti dengan faktor 1, sehingga pangkat j berubah menjadi salah satu keempat hasil di atas.

Pangkat j

Contoh:

$j^9 = (j^4)^2\ j = 1^2 j = j$

$j^{20} = (j^4)^5 = 1^5 = 1$

$j^{30} = (j^4)^7\ j^2 = 1^7\ (-1) = -1$

$j^{15} = (j^4)^3\ j^3 = 1^3(-j) = -j$

Maka j^5 , j^{42} , j^{11} , $x2 - 6x + 34 = 0$ adalah?

Jawaban : $-1, 1, -j, x=3 \pm j5$

Bilangan kompleks

Hasil $x=3\pm j5$ ini tidak dapat dibuat lebih sederhana lagi, karena terdiri dari dua suku terpisah.

Dalam pernyataan $x = 3 + j5$;

3 disebut *bagian real* dari x

5 disebut *bagian imajiner* dari x

Sehingga kedua bagian di atas membentuk bilangan kompleks.

Bilangan kompleks = (bagian real) + j(bagian imajiner)

Pada bilangan kompleks $6 + j9$, maka pembagian real dan imajinernya adalah?

Bilangan kompleks – Penambahan dan Pengurangan Bilangan Kompleks

Bilangan kompleks ini ada banyak penerapan di bidang teknik.

Maka perlu dipahami operasi bilangan kompleks, kita harus memahami bagaimana melakukan operasi-operasi aritmatik biasa.

Contoh:

$$(4 + j5) + (3 - j2) = 4 + j5 + 3 - j2 = (4+3) + j(5-2)$$

$$= 7 + j3$$

$$(4 + j7) - (2 - j5) = 4 + j7 - 2 + j5 = (4-2) + j(7+5)$$

$$= 2 + j12$$

Secara umum $(a+jb) + (c+jd) = (a+c) + j(b+d)$

Bilangan kompleks – Perkalian Bilangan Kompleks

Sebagai contoh $(4 + j5)\ (4 + j7)$, maka hasil kalinya adalah :

(a) (d)

$$(4 + j5)\ (4 + j7)$$

(b) (c)

Dari suku-suku hasil kali

a) Kedua suku sisi kiri
b) Kedua suku di bagian dalam
c) Kedua suku di bagian luar
d) Kedua suku di sisi kanan

$= 16 + j20 + j28 + j^2 35$

$= 16 + j48 – 35$ (karena $j^2 = -1$)

$= -19 + j48$

Jika suatu pernyataan memiliki lebih dari dua faktor, dikalikan faktor-faktor tersebut secara bertahap.

$(3+j4)(2-j5)(1-j2) = (6+j8-j15-j^2 20)(1-j2)$

Bilangan kompleks – Perkalian Bilangan Kompleks

$$(3+j4)(2-j5)(1-j2) = (6+j8-j15-j^2 20)(1-j2)$$

$$= (6-j7+20)(1-j2)$$

$$= (26-j7)(1-j2)$$

$$=(26-j7-j52+j^2 14)$$

$$= (26 - j59 -14)$$

$$= (12 - j59)$$

Bilangan kompleks – Perkalian Bilangan Kompleks

Coba diselesaikan sebuah operasi bilangan kompleks sebagai berikut:

$(5+j8)(5-j8) = 25 + j40 - j40 - j^2 64$

$= 25 + 64$

$= 89$

Kasus di atas adalah kasus khusus, hasilnya tidak memiliki suku j atau merupakan bilangan real.

Bilangan kompleks ini disebut sebagai **bilangan konjugat** dan *hasil kali dari dua bilangan kompleks konjugat selalu bilangan real*.

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

$(5+j8)(5-j8) = 5^2 + (j8)^2 = 5^2 - j^2 8^2$

$= 5^2 + 8^2 \ (j^2 = -1)$

$= 25 + 64 = 89$

Bilangan kompleks – Pembagian Bilangan Kompleks

$$\frac{5-j4}{3}=\frac{5}{3}-j\frac{4}{3}=1{,}67\ -j1{,}33$$

Sekarang bagaimana dengan kasus berikut $\frac{7-j4}{4+j3}$

Yang dilakukan adalah mengonversi penyebut menjadi bilangan real.

Caranya adalah mengonversi (4 + j3) menjadi bilangan real dengan mengalikan bilangan ini dengan **konjugatnya** yaitu (4 – j3).

$$\frac{7-j4}{4+j3}=\frac{(7-j4)(4-j3)}{(4+j3)(4-j3)}=\frac{28-j16-j21+j^2 12}{16+9}=\frac{16-j37}{25}$$

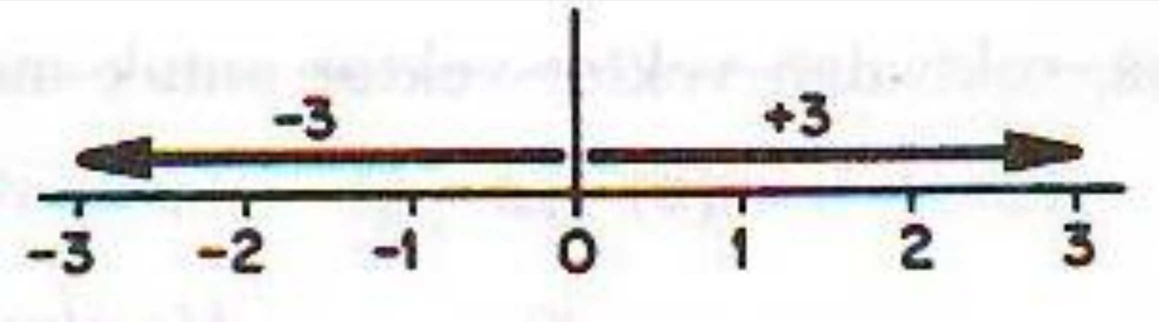
$$\frac{16}{25}-j\frac{37}{25}=0{,}64-j1{,}48$$

Representasi Grafis Suatu Bilangan Kompleks

Kita tidak dapat menentukan nilai suatu bilangan kompleks selayaknya bilangan real, tetapi bisa dipresentasikan secara **grafis**.

Dala sistem penggambaran bilangan biasa (kartesius) angka (3) disajikan oleh sebuah garis dari titik asal (0) ke titik 3 pada skalanya. Begitu pula untuk merepresentasikan (-3) dibawa ke titik -3 pada skalanya.

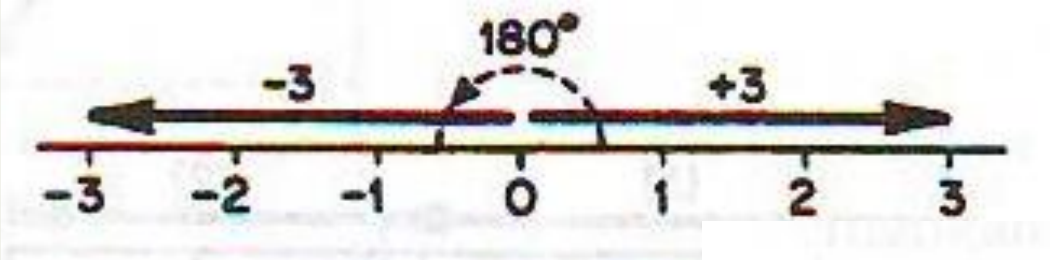
Kedua garis sama panjang hanya ditarik pada arah masing-masing berlawanan. Maka dibuat tanda mata panah untuk membedakan keduanya.



Sebuah garis merepresentasikan arah dan besar (magnitudo) disebut sebagai vektor

Representasi Grafis Suatu Bilangan Kompleks

Sekarang jika kita kalikan (+3) dengan faktor (-1) didapatkan (-3) sehingga faktor (-1) memiliki pengaruh memutar vektornya sebesar 180^0

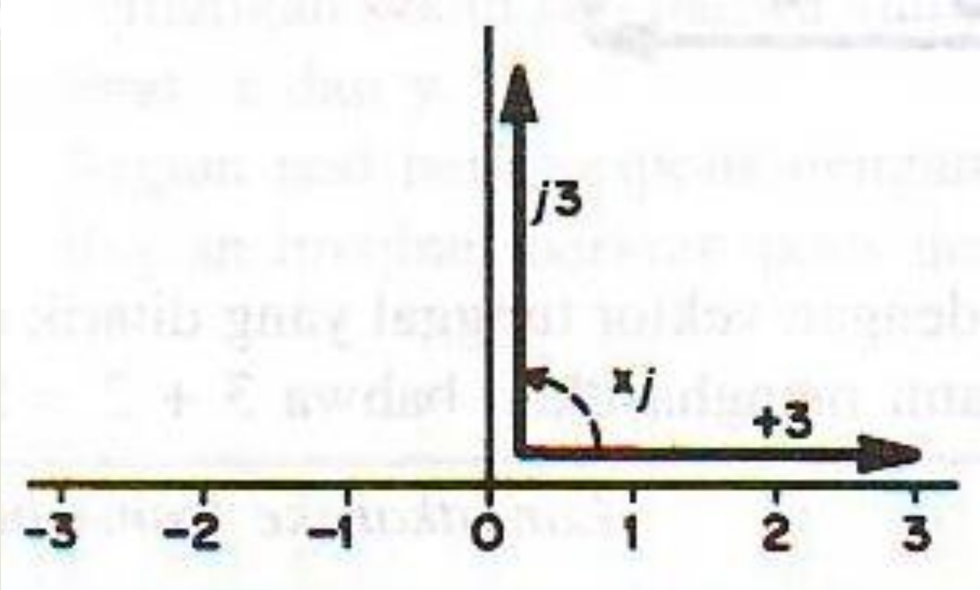


Mengalikan dengan faktor (-1) ekivalen dengan j^2

Jika dikalikan dengan j saja maka akan memiliki

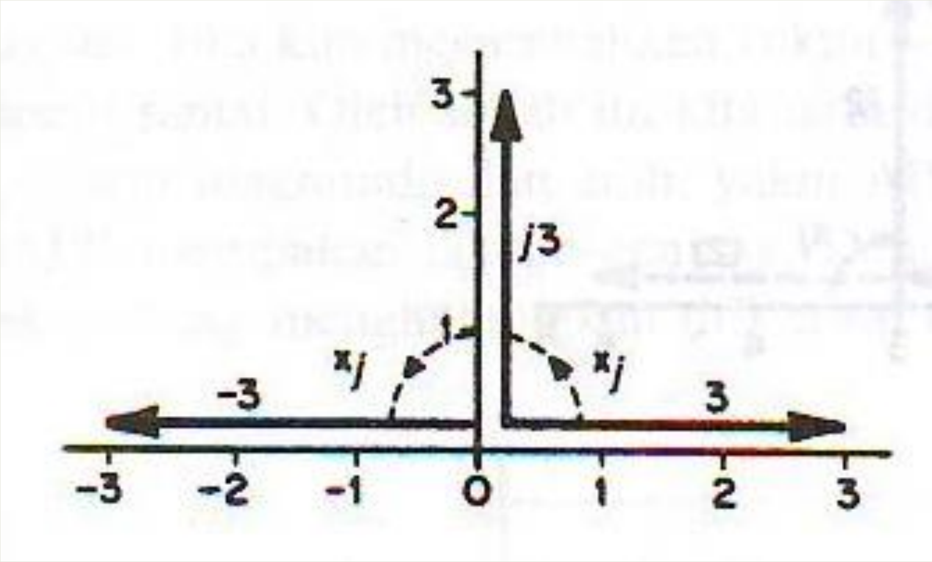
pengaruh separuh saja yang berarti akan

memutar vektor 90^0.



Representasi Grafis Suatu Bilangan Kompleks

- Faktor j selalu memutar vektor sebesar 90^0 dalam arah positif pada pengukuran sudut (berlawanan arah jarum jam).
- Jika kita mengalikan j3 dengan faktor j lagi maka akan didapatkan $j^2 3$, berarti (-3) dan diagramnya akan menghasilkan:
- Jika (-3) dikalikan j lagi, maka vektor berputar 90^0.
- Coba dibuat sketsanya pada slide berikutnya:

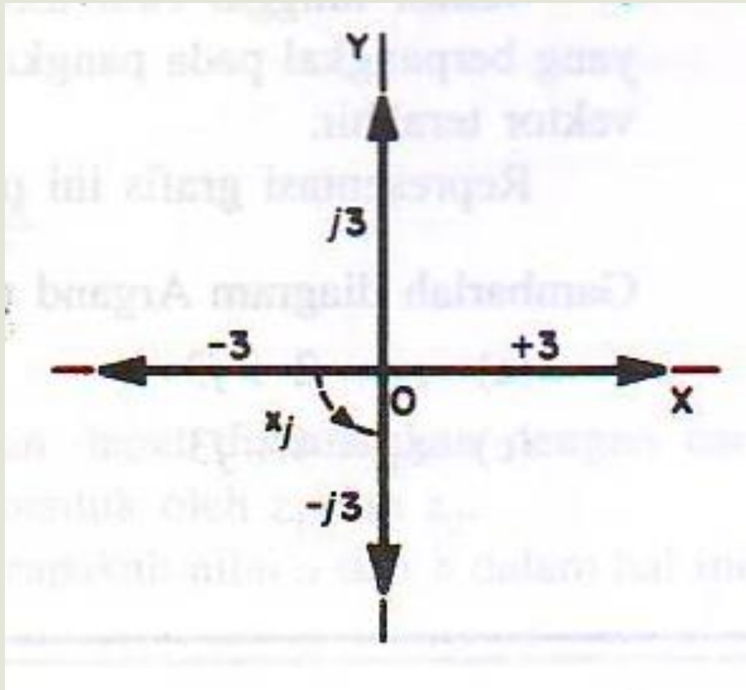


Representasi Grafis Suatu Bilangan Kompleks

Dinyatakan garis acuan dalam sumbu x dan sumbu y

Maka dapat dilihat bahwa:

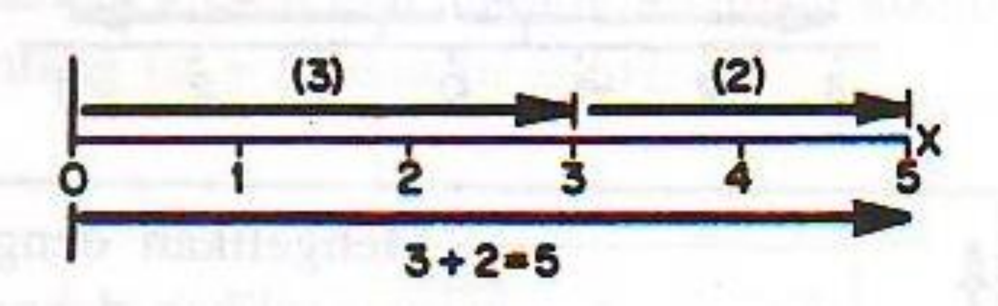
1. Skala pada sumbu –X merepresentasikan bilangan real. Maka sumbu-X disebut *sumbu real*
2. Skala pada sumbu-Y merepresentasikan bilangan imajiner. Oleh karena itu sumbu-Y disebut *sumbu imajiner*.



- Sekarang coba dibuat sketsa vektor untuk merepresentasikan: (a) 5; (b) -4; (c) j2; (d) -j

Representasi Grafis Suatu Bilangan Kompleks

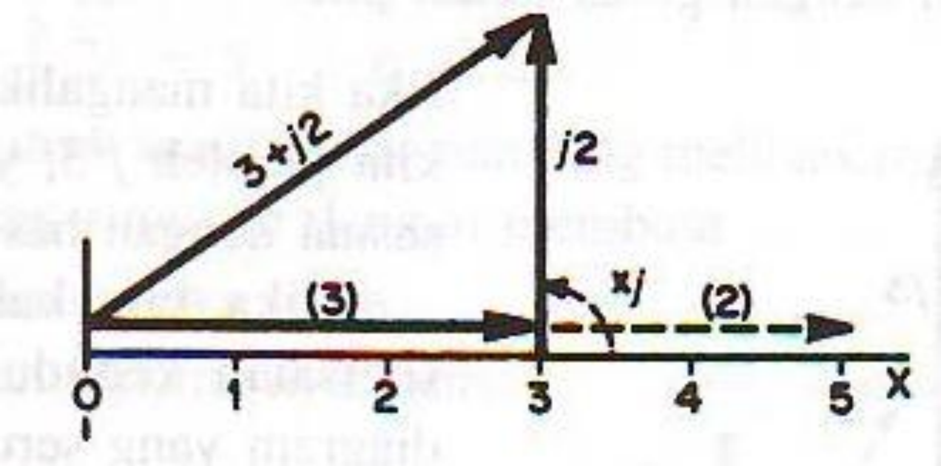
Jika kita ingin menyatakan 3+2 sebagai jumlah dua buah vektor, kita harus menggambar keduanya sebagai rantai, vektor kedua berawal dari ujung vektor pertama.



Jika kita ingin merepresentasikan bil kompleks

(3 + j2), maka ditambahkan vektor yang

mewakili 3 dengan vektor yang mewakili j2.



Representasi Grafis Suatu Bilangan Kompleks

Vektor tunggal ekuivalen yang merepresentasikan (3 + j2) adalah sebuah vektor yang berpangkal pada pangkal dari vektor pertama (titik asal) dan berujung pada ujung vektor terakhir.

Representasi grafis ini menghasilkan *Diagram Argand*

Sekarang dicoba menggambar diagram Argand untuk merepresentasikan vektor:

a. $Z_1 = 2 + j3$

b. $Z_2 = -3 + j2$

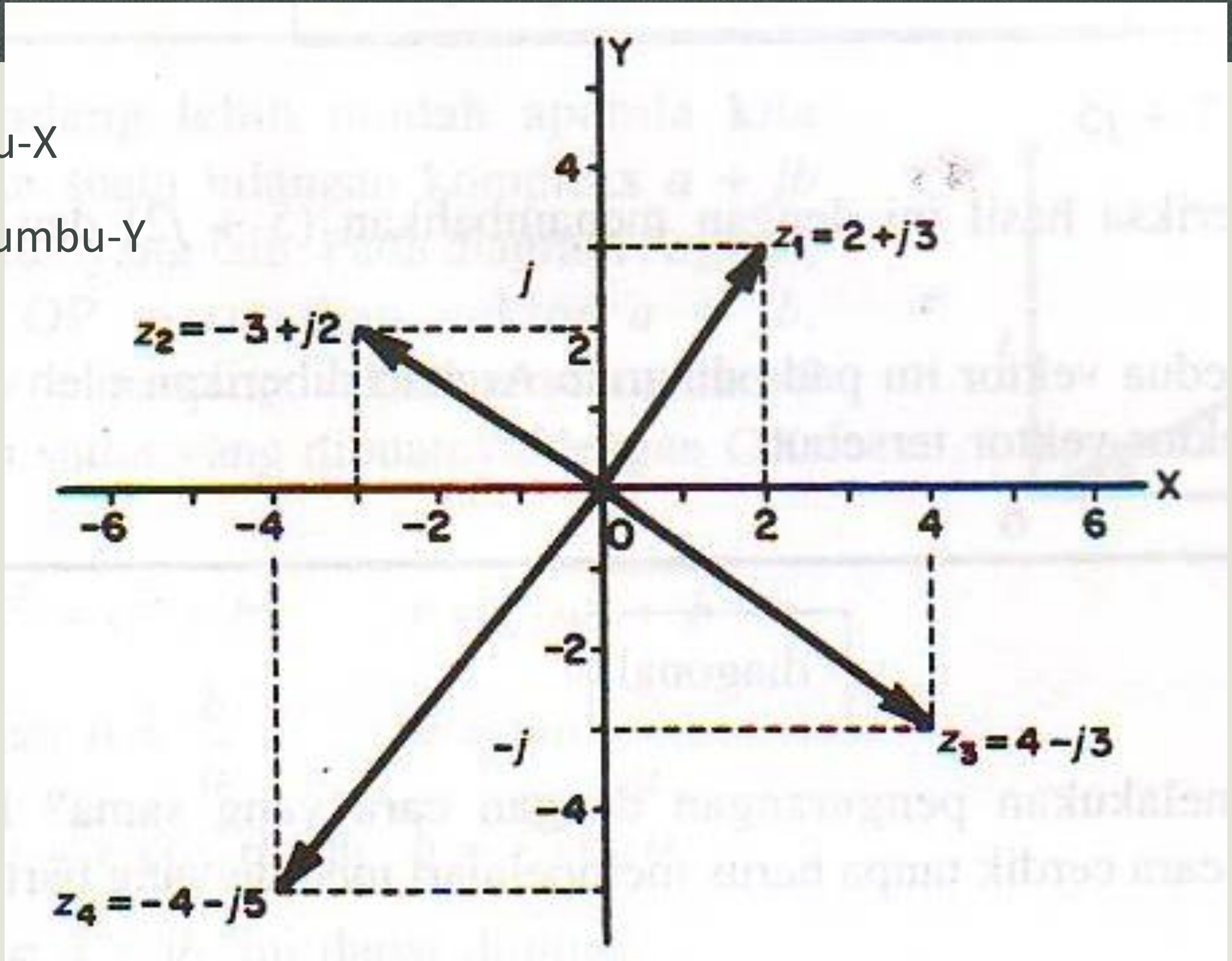
c. $Z_3 = 4 – j3$

d. $Z_4 = -4 – j5$

Representasi Grafis Suatu Bilangan Kompleks

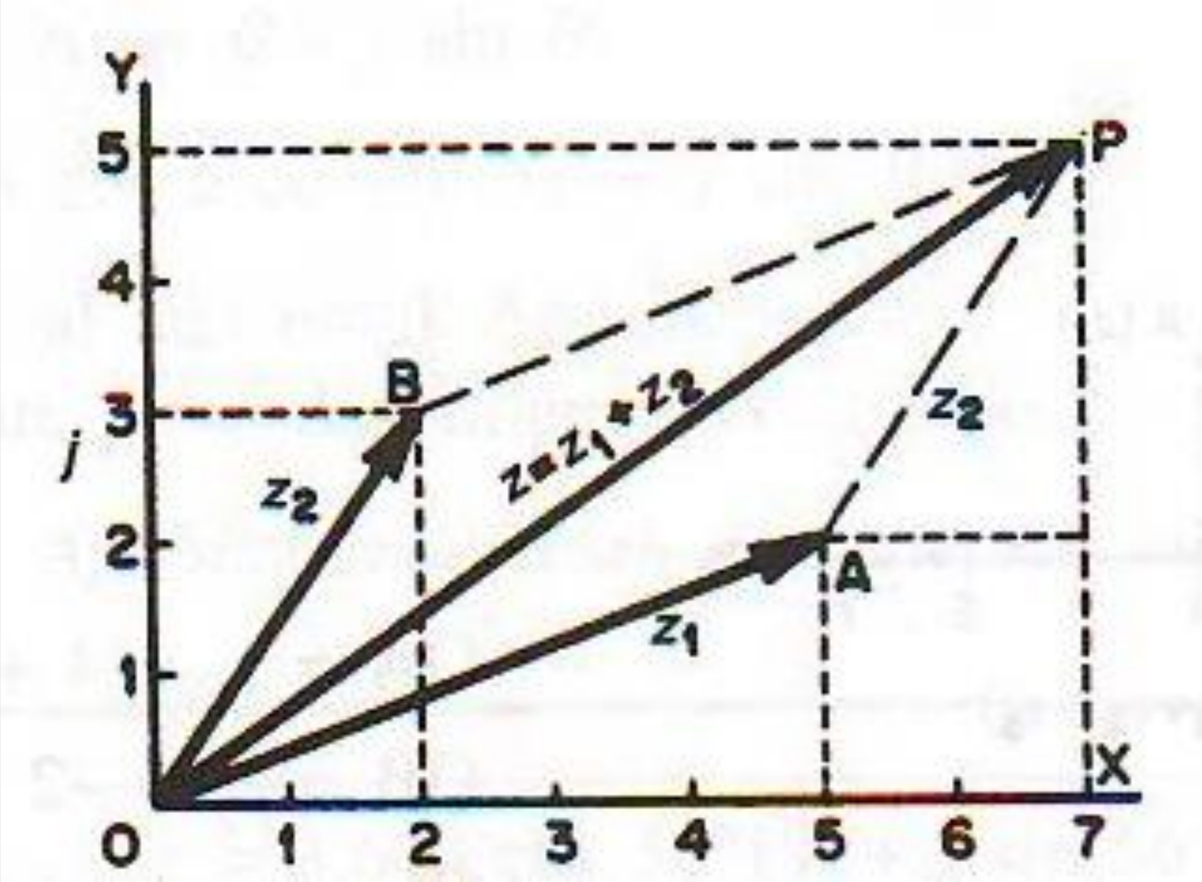
Bagian real berkorespon dengan sumbu-X

Bagian imajiner berkorespon dengan sumbu-Y



Penjumlahan Bilangan Kompleks secara Grafis

Coba kita jumlahkan $z_1 = 5 + j2$ dengan $z_2 = 2 + j3$ dengan menggunakan diagram Argand.



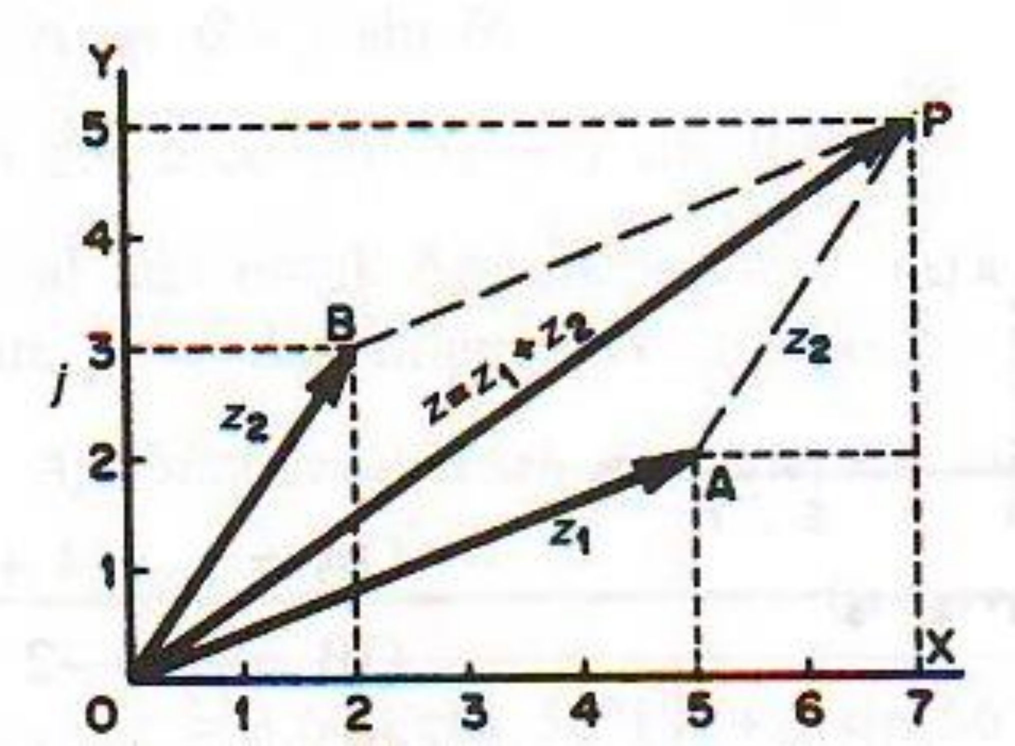
Penjumlahan Bilangan Kompleks secara Grafis

Jika OP mewakili bilangan kompleks a + jb, berapakah nilai a dan b?

a = 5 + 2 = 7

b = 2 + 3 = 5

Maka OP = z = 7 + j5

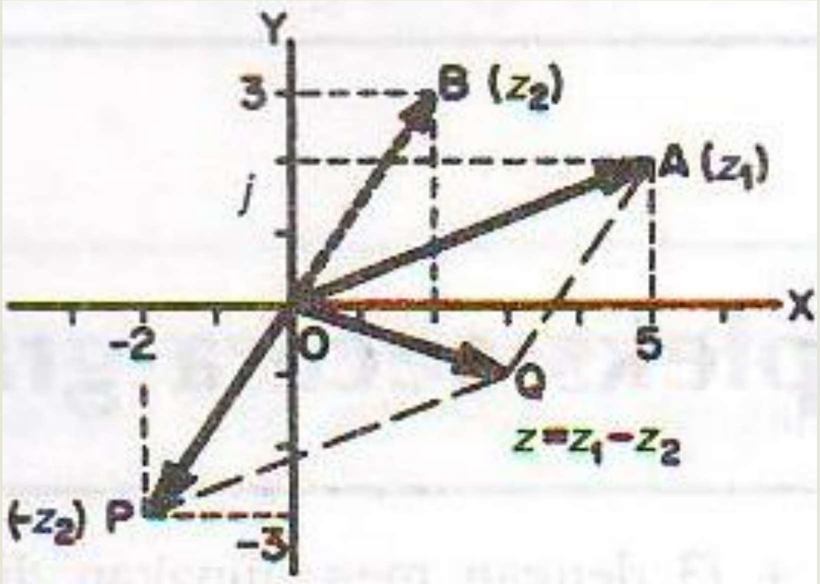


Pengurangan Bilangan Kompleks secara Grafis

Maka sebuah nilai $z_1 – z_2 = z_1 + (-z_2)$

Kita menggambar vektor yang merepresentasikan z_1 dan vektor negatif z_2 serta menambahkan keduanya seperti sebelumnya.

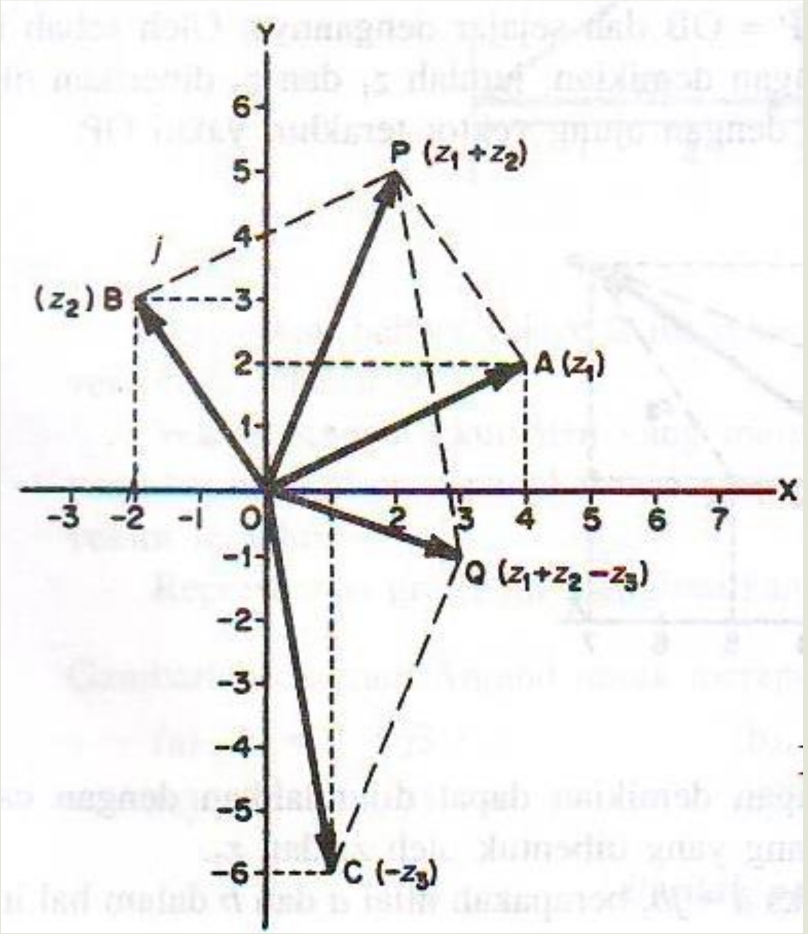
Karena vektor z_2 hanyalah vektor dengan magnitudo yang sama hanya arah berlawanan.



Jika $z_1 = 5 + j2$ dan $z_2 = 2 + j3$
Vektor OA $= z_1 = 5 + j2$
OP $= -z_2 = - (2 + j3)$
Maka OQ $= z_1 + (-z_2)$
$= z_1 – z_2$

Pada diagram Argand coba tentukan:
$(4 + j2) + (-2 + j3) – (-1 + j6)$

Pengurangan Bilangan Kompleks secara Grafis



OA = $z_1 = 4 + j2$

OB = $z_2 = -2 + j3$

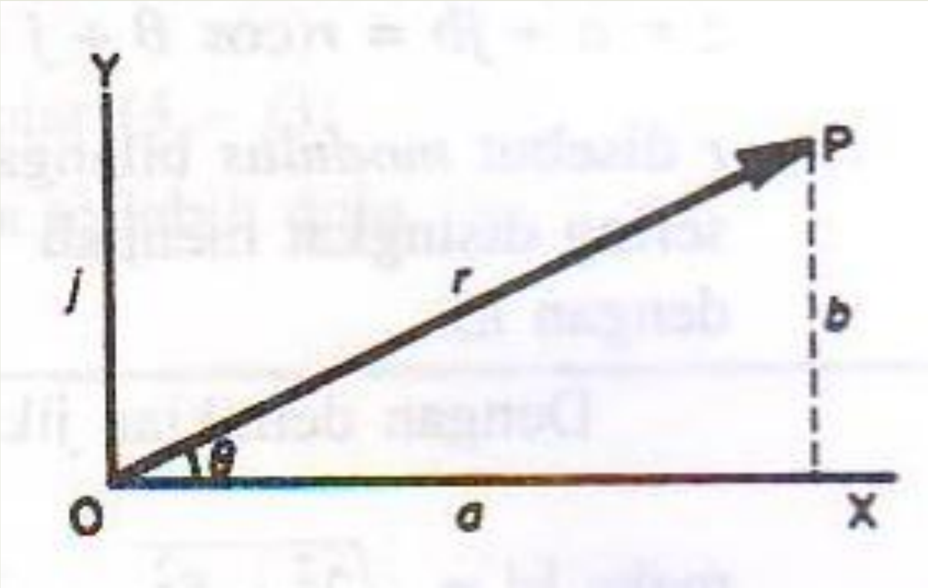
OC = $-z_3 = 1 – j6$

Maka OP = $z_1 + z_2$

OQ = $z_1 + z_2 – z_3 = 3 - j$

Bentuk Polar suatu Bilangan Kompleks

Pada diagram Argand, misalkan OP merupakan vektor a + jb. Misalkan r = panjang vektor tersebut dan θ merupakan sudut yang dibuatnya dengan OX.



Maka $r^2 = a^2 + b^2$ $\quad r = \sqrt{a^2 + b^2}$

Dan $tan\theta = \frac{b}{a}$ $\quad \theta = \ tan^{-1}\frac{b}{a}$

Juga $a = r \cos \theta$ dan $b = r \sin \theta$

Karena z = a + jb, dapat ditulis

$$z = r \cos \theta + jr \sin \theta \text{ yaitu } z = r (\cos \theta + j \sin \theta)$$

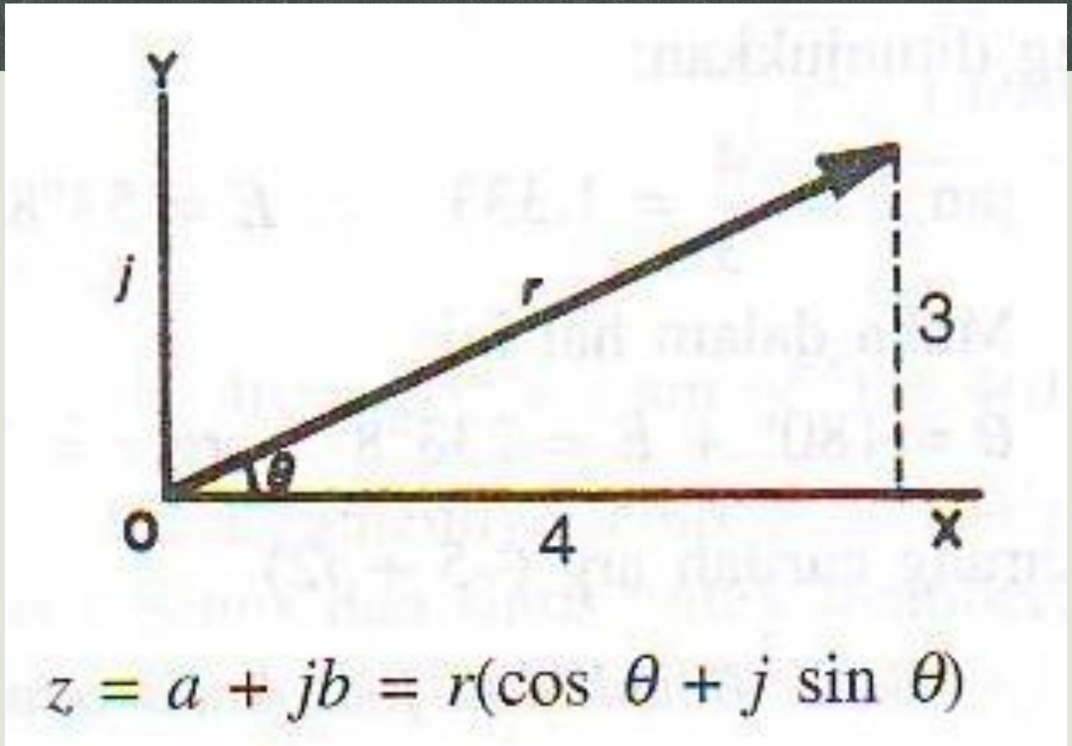
Ini disebut *bentuk polar* bilangan kompleks a + jb dimana

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$ dan $\theta = \ tan^{-1}\frac{b}{a}$

Bentuk Polar suatu Bilangan Kompleks

Coba nyatakan $z = 4 + j3$ dalam bentuk polar

Bisa dibuat sketsa untuk membantu.



a. $r^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$
   $r = 5$

b. $\tan\theta = ¾ = 0{,}75$
   $\theta = 36^0 52'$

Maka dalam hal ini $z = 5(\cos 36^0 52' + j \sin 36^0 52')$

- r ini disebut juga *modulus* bil kompleks z dan sering disingkat ‘mod z’ atau $|z|$
- θ disebut *argumen* bil kompleks dan dapat disingkat ‘arg z’

*berhati-hati dengan nilai θ

Bentuk Eksponensial suatu Bilangan Kompleks

Banyak fungsi yang dapat dinyatakan sebagai deret, misalnya:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

$$\sin x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

Berikutnnya coba diambil deret e^x dan menulis jθ sebagai ganti x, didapatkan:

Bentuk Eksponensial suatu Bilangan Kompleks

Banyak fungsi yang dapat dinyatakan sebagai deret, misalnya:

$$e^{j\theta} = 1 + j\theta + \frac{j\theta^2}{2!} + \frac{j\theta^3}{3!} + \frac{j\theta^4}{4!} + \frac{j\theta^5}{5!} + \cdots$$

$$e^{j\theta} = 1 + j\theta + \frac{j^2\theta^2}{2!} + \frac{j^3\theta^3}{3!} + \frac{j^4\theta^4}{4!} + \frac{j^5\theta^5}{5!} + \cdots$$

$$e^{j\theta} = 1 + j\theta - \frac{\theta^2}{2!} - \frac{j\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \frac{j\theta^5}{5!} + \cdots$$

$$e^{j\theta} = \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots\right) + j\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots\right)$$

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

Karena itu r(cos θ + j sin θ) sekarang dapat ditulis sebagai $re^{j\theta}$.

Dimana disebut sebagai bentuk *eksponensial* bilangan kompleks

Bentuk Eksponensial suatu Bilangan Kompleks

Bentuk eksponensial dapat diperoleh dari bentuk polar dengan sangat mudah karean nilai r adalah sama dan sudut θ adalah sama untuk keduanya.

Yang perlu diingat, bahwa dalam bentuk eksponensial, sudut haruslah dalam bentuk *radian*.

Oleh karena itu dicoba untuk mengubah bentuk polar $5(\cos 60^0 + j \sin 60^0)$ menjadi bentuk eksponensialnya.

$5(\cos 60^0 + j \sin 60^0)$

R = 5

$\theta = 60^0 = \pi/3$ radian, maka bentuk eksponensialnya adalah $5e^{j\frac{\pi}{3}}$

Kemudian untuk bentuk negatif, $e^{-j\theta} = \cos(-\theta) + j \sin(-\theta) = \cos\theta - j \sin\theta$

Logaritma Bilangan Kompleks

Jika kita peroleh

$z = re^{j\theta}$

Maka dapat dikatakan

$\ln z = \ln r + j\theta$

Jika $z = 6{,}42e^{j1{,}57}$

$\ln z = \ln 6{,}42 + j1{,}57$

$= 1{,}8594 + j1{,}57$