

CONTOH SOAL BILANGAN KOMPLEKS

1. Tentukan bagian riil dan imajiner dari bilangan kompleks berikut.

$$3 + 2i$$

$$4 - 5i$$

$$10 + 3i$$

Pembahasan

$3 + 2i$. Bagian riil = 3; bagian imajiner = $2i$.

$4 - 5i$. Bagian riil = 4; bagian imajiner = $-5i$.

$10 + 3i$. Bagian riil = 10; bagian imajiner = $3i$.

2. Tentukan hasil operasi bilangan kompleks berikut.

$$(3i + 3) + (5 - 6i)$$

$$(2i - 4) - (3 - 7i)$$

Pembahasan

$$(3i + 3) + (5 - 6i) = (3 + 5) + (3i - 6i) = 8 - 3i.$$

$$(2i - 4) - (3 - 7i) = (-4 - 3) + (2i - (-7i)) = -7 + 9i$$

3. Tentukan bagian bilangan riil dan imajiner dari bilangan kompleks di bawah ini!

a. $4 + 1i$

b. $5 - 3i$

c. $11 + 2i$

Pembahasan :

a. $4 + 1i$ bilangan riilnya adalah 4; bilangan imajiner adalah $1i$

b. $5 - 3i$ bilangan riilnya adalah 5; bilangan imajiner adalah $-3i$

c. $11 + 2i$ bilangan riilnya adalah 11; bilangan imajiner adalah $2i$

4. Tentukan hasil operasi dari bilangan kompleks $3i + 2 + 5 - 7i$!

Pembahasan :

$$(3i + 2) + (5 - 7i)$$

$$= (2 + 5) + (3i - 7i)$$

$$= 7 + -4i$$

$$= 7 - 4i$$

5. Tentukan hasil operasi dari bilangan kompleks $3i - 5 - 3 - 6i$!

Pembahasan :

$$\begin{aligned} & (3i - 5) - (3 - 6i) \\ &= (-4 - 3) + (3i - (-6i)) \\ &= -7 + 9i \end{aligned}$$

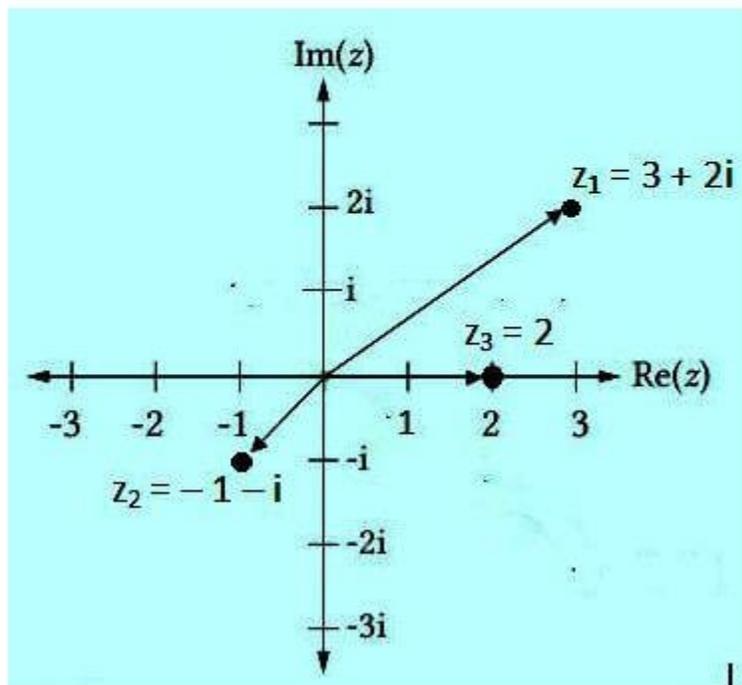
Gambarlah bilangan kompleks berikut pada bidang kompleks.

a. $z_1 = 3 + 2i$

b. $z_2 = -1 - i$

c. $z_3 = 2$

Pembahasan



Pembahasan bilangan kompleks nomor 2

Tentukan bentuk eksponen dari bilangan kompleks berikut.

a. $z = (\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)$

b. $z = \frac{\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ}{2}$

Pembahasan

$$e^{i\theta} = (\cos \theta + i \sin \theta)$$

a. $z = (\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ) = e^{i30^\circ}$

b. $z = \frac{\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ}{2} = \frac{1}{2} e^{i15^\circ}$

Tentukan apakah setiap bilangan kompleks berikut sama atau berbeda.

a. $z_1 = 4 - (-2i)$ dan $z_2 = 4 + 2i$

b. $z_1 = i$ dan $z_2 = 1 - i$

c. $z_1 = -1 + i$ dan $z_2 = i + 1$

Pembahasan

a. $z_1 = 4 - (-2i) = 4 + 2i$. Jadi $z_1 = z_2$.

b. z_1 berbeda dengan z_2

c. z_1 berbeda dengan z_2

Tentukan bilangan x dan y dengan $z_1 = x + 3i$ dan $z_2 = 3 - yi$ agar $z_1 = z_2$.

Pembahasan

$$z_1 = z_2$$

$$x + 3i = 3 - yi$$

$$x = 3$$

$$y = -3$$

Jika diberikan bilangan kompleks $z_1 = 2 + 3i$ dan $z_2 = 1 - i$. Tentukan $z_1 + z_2$. Jika $z_3 = z_1 + z_2$, bagaimana bentuk dari $z_3 + z_1$?

Pembahasan

$$z_1 + z_2 = (2 + 3i) + (1 - i) = (2 + 1) + (3i - i) = 3 + 2i$$

$$z_3 + z_1 = (z_1 + z_2) + z_1 = (3 + 2i) + (2 + 3i) = (3 + 2) + (2i + 3i) = 5 + 5i$$

Diberikan $z_1 = -2 - 4i$ dan $z_2 = -8 + 6i$. Tentukan $3z_1$ dan $3z_1 - 2z_2$.

Pembahasan

$$3z_1 = 3(-2 - 4i) = -6 - 12i$$

$$3z_1 - 2z_2 = (-6 - 12i) - 2(-8 + 6i) = (-6 - 12i) + 16 - 12i = 10 - 24i$$

Buktikan bahwa $3z - \frac{1}{2}(2z) = 2z$ untuk sembarang bilangan kompleks z .

Pembahasan

$$3z - \frac{1}{2}(2z) = 3z - z = 2z \text{ (terbukti)}$$

Misalkan diberikan bilangan kompleks $z_1 = 1 + i$ dan $z_2 = \frac{1}{2} - 2i$, maka tentukanlah $z_1 \times z_2$.

Pembahasan

$$\begin{aligned} z_1 \times z_2 &= (1 + i) \times \left(\frac{1}{2} - 2i\right) \\ &= 1 \times \left(\frac{1}{2} - 2i\right) + i \left(\frac{1}{2} - 2i\right) \\ &= \frac{1}{2} - 2i + \frac{1}{2}i - 2i^2 \\ &= \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i - 2(-1) = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}i \end{aligned}$$

Buktikan bahwa $(z_1 - z_2)^2 = z_1^2 - 2z_1z_2 + z_2^2$.

Pembahasan

$$\begin{aligned} (z_1 - z_2)^2 &= (z_1 - z_2) \times (z_1 - z_2) \\ &= z_1(z_1 - z_2) - z_2(z_1 - z_2) \\ &= z_1^2 - z_1z_2 - z_1z_2 + z_2^2 \\ &= z_1^2 - 2z_1z_2 + z_2^2 \text{ (terbukti)} \end{aligned}$$

Diberikan bilangan kompleks $z_1 = 1 - i$ dan $z_2 = 2 + 3i$, tentukan invers dari $z_1 + z_2$.

Pembahasan

$$z = z_1 + z_2 = (1 - i) + (2 + 3i) = (1 + 2) + (-i + 3i) = 3 + 2i$$

$$x = 3 \text{ dan } y = 2$$

$$z^{-1} = \frac{x}{x^2+y^2} - i \frac{y}{x^2+y^2}$$

$$z^{-1} = \frac{3}{3^2+2^2} - i \frac{2}{3^2+2^2}$$

$$z^{-1} = \frac{3}{13} - \frac{2}{13}i$$

Tentukan sekawan setiap bilangan kompleks berikut.

a. $2 + i^2$

b. $1 + \frac{1}{i}$

c. $1 + 2i$

Pembahasan

a. $2 + i^2 = 2 + (-1) = 1 + 0i$ maka bentuk sekawan = $1 - 0i = 1$

b. $1 + \frac{1}{i} = 1 - i$ maka bentuk sekawan = $1 + i$

c. $1 + 2i$ mempunyai bentuk sekawan = $1 - 2i$

Misalkan diberikan bilangan kompleks $z = x + iy$. Tentukan nilai x dan y yang memenuhi $\operatorname{Re}(\overline{2i + 2\bar{z}}) = 8$

Pembahasan

$$2i + 2\bar{z} = 2i + 2(x - iy) = 2x + i(2 - y)$$

$$\overline{2i + 2\bar{z}} = 2x + i(y - 2)$$

Karena $\operatorname{Re}(\overline{2i + 2\bar{z}}) = 8$ maka $2x = 8$ atau $x = \frac{8}{2} = 4$ dan y sembarang bilangan imajiner.

Tentukan modulus setiap bilangan kompleks berikut.

a) $2 + i^2$

b) $1 + \frac{1}{i}$

c) $1 + 2i$

Pembahasan

a) $|z| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$

b) $|z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

c) $|z| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

Misalkan diberikan bilangan kompleks $z = \frac{1-2i}{3+4i}$. Tentukanlah $|\bar{z}|$

Pembahasan

$$|\bar{z}| = \frac{\sqrt{1^2 + (-2)^2}}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{1}{5} \sqrt{5}$$

Tentukan argumen utama bilangan kompleks berikut.

a. $1 + \sqrt{3}i$

b. $-i$

Pembahasan

Ubah bilangan kompleks ke dalam bentuk polar (lihat contoh soal nomor 3)

a. $z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = 2(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)$ maka $\text{Agr}(z) = 30^\circ$

b. $z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = \cos 180^\circ + i \sin 180^\circ$ maka $\text{Agr}(z) = 180^\circ$

Tentukan argumen bilangan kompleks berikut.

a. $1 + \sqrt{3}i$

b. $-i$

Pembahasan

a. $\text{Agr}(z) = 30^\circ + 2k\pi$ untuk k bilangan bulat.

b. $\text{Agr}(z) = 180^\circ + 2k\pi$ untuk k bilangan bulat.

Tentukan argumen hasil perkalian dan pembagian dari dua kompleks $z_1 = 2$ dan $z_2 = 2(\cos 360^\circ + i \sin 360^\circ)$

Pembahasan

a. $\text{Agr}(z_1 \times z_2) = 360^\circ + 2k\pi$ untuk k bilangan bulat.

b. $\text{Agr}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = -360^\circ + 2k\pi$ untuk k bilangan bulat.